4º CE231 - Modelos Markovianos

IV Distribuição estacionária

Willian Meira Schlichta GRR20159077

17 de Agosto de 2020

##PACOTES USADOS  
library(dplyr)  
library(markovchain)

### Exercicio 3

Uma Matriz de probabilidade de transição é dita ser duplamente estocástica e a soma por colunas é também 1, isto é, se

Considere uma cadeia com matriz de transição duplamente estocástica irredutível, aperiódica e consistindo de estados, do qual {0,1,2,…,}. Prove que a distribuição estacionária é dada por

**Resolução**

O enunciado mostra que a cadeia em análise é irredutível (ou seja, todos os estados se comunicam entre si) e aperiódica, ou seja, (Definição 34). Em conjunto, essas duas afirmações evidenciam que nenhum dos elementos da matriz de transição é nulo. Em seguida, temos a informação de que a matriz de transição é duplamente estocástica, ou seja, todas as colunas e linhas somam 1. Tomemos o exemplo mais simples, para , implicando uma cadeia de Markov com dois estados:

Logo, temos um sistema em que , , e . Não é difícil perceber que a = b = c = d, de forma que para que as condições acima mencionadas procedam, a = b = c = d = 0.5. Para o caso de , temos a seguinte matriz de transição:

Da mesma forma, temos que , , , , e . A solução dessas equações implica que , e com as condições mencionadas no enunciado, todos os valores são iguais. Portanto, . Calculando a distribuição estacionária para essas duas matrizes, temos:

estados3a <- c("0", "1")  
M <- matrix(data = c(0.5, 0.5, 0.5, 0.5), nrow = 2, ncol = 2,  
byrow = TRUE, dimnames = list(estados3a, estados3a));M

0 1  
0 0.5 0.5  
1 0.5 0.5

estados3b <- c("0", "1", "2")  
Mb <- matrix(data = c(1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3), nrow = 3, ncol = 3,  
byrow = TRUE, dimnames = list(estados3b, estados3b));Mb

0 1 2  
0 0.3333333 0.3333333 0.3333333  
1 0.3333333 0.3333333 0.3333333  
2 0.3333333 0.3333333 0.3333333

ProbT3b <- new("markovchain", states=estados3b, transitionMatrix=Mb)  
steadyStates(ProbT3b)

0 1 2  
[1,] 0.3333333 0.3333333 0.3333333

Logo, verifica-se que para qualquer valor de y na distribuição estacionária, seu valor dentro do vetor sempre será representado por , para todo . Ou seja, para 2 estados, , e . Para 3 estados, e e assim sucessivamente.

### Exercicio 4

Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados = {0,1,2} e matriz de probabilidade de transição

Mostre que esta cadeia tem uma única distribuição estacionária e encontre-a.

**Resolução**

Portanto, o seguinte sistema de equações lineares, caso tenha solução, encontre a distribuição estacionária:

Resolvendo o sistema: equação(1) - equação(3)

equação(1) - equação(2) e tendo

Tendo , e . A distribuição estacionária

### Exercicio 8

Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados = {0,1,2} e matriz de probabilidade de transição

**a)** Mostre que esta é uma cadeia irredutível.

**Resolução**

gamma8 <- matrix(c(0,0,1,1,0,0,0.5,0.5,0), byrow=T, ncol = 3, dimnames=list(0:2))  
ProbT8 = new("markovchain", states=as.character(0:2), transitionMatrix=gamma8, name="Γ")

Abaixo apresento a saída do *summary* da matriz de transição:

summary(ProbT8)

G Markov chain that is composed by:   
Closed classes:   
0 1 2   
Recurrent classes:   
{0,1,2}  
Transient classes:   
NONE   
The Markov chain is irreducible   
The absorbing states are: NONE

Aqui temos que todos os estados se comunicam, logo a matriz é irredutível.

**b)** Encontre o período.

**Resolução**

Aplicando a Def. 34 temos:

ProbT8

G   
 A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
 0, 1, 2   
 The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
 0 1 2  
0 0.0 0.0 1  
1 1.0 0.0 0  
2 0.5 0.5 0

ProbT8^2

G^2   
 A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
 0, 1, 2   
 The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
 0 1 2  
0 0.5 0.5 0.0  
1 0.0 0.0 1.0  
2 0.5 0.0 0.5

ProbT8^3

G^3   
 A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
 0, 1, 2   
 The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
 0 1 2  
0 0.50 0.00 0.5  
1 0.50 0.50 0.0  
2 0.25 0.25 0.5

ProbT8^4

G^4   
 A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
 0, 1, 2   
 The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
 0 1 2  
0 0.25 0.25 0.50  
1 0.50 0.00 0.50  
2 0.50 0.25 0.25

ProbT8^5

G^5   
 A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
 0, 1, 2   
 The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
 0 1 2  
0 0.500 0.250 0.25  
1 0.250 0.250 0.50  
2 0.375 0.125 0.50

ProbT8^6

G^6   
 A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
 0, 1, 2   
 The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
 0 1 2  
0 0.375 0.125 0.500  
1 0.500 0.250 0.250  
2 0.375 0.250 0.375

$d\_0=m.d.c \left \{ 2,3,4, \cdots \right \}=1\\$ $d\_1=m.d.c \left \{ 3,5,6, \cdots \right \}=1\\$ $d\_2=m.d.c \left \{ 2,3,4, \cdots \right \}=1\\$

Do teorema 44, observamos que

ProbT8^50000

G^50000   
 A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
 0, 1, 2   
 The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
 0 1 2  
0 0.4 0.2 0.4  
1 0.4 0.2 0.4  
2 0.4 0.2 0.4

Então temos que: $\Pi(0)=0.4,\ \Pi(1)=0.2\ e\ \Pi(2)=0.4\\$

$\lim\_{n\rightarrow \infty }\gamma^{(n)}\_{x,0} = \pi(0) = 0.4\\$ $\lim\_{n\rightarrow \infty }\gamma^{(n)}\_{x,1} = \pi(1) = 0.2\\$ $\lim\_{n\rightarrow \infty }\gamma^{(n)}\_{x,2} = \pi(2) = 0.4\\$

O que leva a conclusão de que a cadeia é aperiódica ()

**c)** Encontre a distribuição estacionária.

**R:**

A distribuição estacionária é dada por:

estados4 <- c("0", "1", "2")  
estados8 <- estados4  
y <- matrix(data=c(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0.5, 0.5, 0), nrow = 3, ncol = 3, byrow = TRUE,  
dimnames = list(estados8, estados8))  
ProbT8 <- new("markovchain", states=estados8, transitionMatrix=y)  
steadyStates(ProbT8)

0 1 2  
[1,] 0.4 0.2 0.4

Logo, a distribuição estacionária da cadeia acima é dada por

### Exercicio 12

Sejam e duas distribuições estacionárias distintas para uma Cadeia de Markov.

**a)** Prove que para , a função definida como:

, , é uma distribuição estacionária.

**R:**

Nós temos que e são distribuições estacionárias e, portanto, satisfazem a definição 26, ou seja:

Logo, podemos escrever que:

Essa solução vale para todo y 2 S. A condição de que também procede e, portanto, é uma distribuição estacionária.

**b)** Mostre que distintos valores de implicam em distribuições estacionárias distintas. Para demonstrar isso sugere-se escolher tal que e prove que implica que o .

**R:**

Sabemos que e são distintos, e, portanto, há um valor tal que . Tomamos um valor e arbitrários do intervalo [0, 1], que satisfaçam para todo . Logo, o que devemos mostrar aqui é que . Como a condição também é válida para , temos que:

Como sabemos que , logo a igualdade , o que prova que distintos valores de implicam distribuição estacionárias distintas.